Kun jij de onderstaande opgaven oplossen?
Stuur dan je oplossing naar het onderstaande adres en maak kans op een boekenbon van 25 gulden!

Pythagoras Olympiade

Opgave 63

Bepaal alle $a, b, c \in \mathbf{Z}$ waarvoor geldt:

$$ab + 5 = c,$$
$$bc + 1 = a,$$
$$ca + 1 = b.$$

Opgave 64

Iemand heeft elk punt van het vlak een kleur gegeven. In totaal heeft hij 10 kleuren gebruikt. Bewijs dat er een oneindige verzameling verschillende driehoeken is die allemaal congruent zijn en waarvan alle hoekpunten dezelfde kleur hebben.

Stuur je oplossing naar:
Pythagoras Olympiade
TU Eindhoven
Faculteit Wiskunde
Hoofdgebouw kamer 9.50
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
email: sander@win.tue.nl

Vermeld bij de oplossing je *naam*, *adres*, *school* en *klas*. Stuur bij de antwoorden ook een *toelichting*, waarin uitgelegd wordt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs). Insturen is mogelijk tot en met 15 november 2000. Onder de inzenders van goede oplossingen wordt per opgave een boekenbon van vijfentwintig gulden verloot. Let op: Het is de bedoeling dat je de oplossing *zelf* vindt! Hieronder volgen de oplossingen van de opgaven uit het juninummer.

Veel succes! Ronald van Luijk, Wim Oudshoorn en Sander van Rijnswou.

Laddercompetitie (inzet)

De Pythagoras Olympiade is ook een laddercompetitie. De stand wordt bijgehouden op de homepage van Pythagoras. Voor de bovenste drie leerlingen van de laddercompetitie zijn er aan het eind van het jaar hoofdprijzen van 250, 200 en 150 gulden. In het volgende nummer volgt de eindstand van schooljaar 1999-2000.

Opgave 55

Beantwoord de volgende twee vragen voor de positieve reële getallen x, y en z. Als $x+y+z \geq 3$, is dan altijd:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq 3?$$

Als $x+y+z \leq 3$, is dan altijd:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 3?$$

OPLOSSING. Het antwoord op de eerste vraag luidt: nee. Kies bijvoorbeeld $x = 1/2$ en $y = z = 5/4$. Dan is inderdaad $x+y+z \geq 3$, maar

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{18}{5} > 3.$$

Het antwoord op de tweede vraag is wel positief. Om dat te bewijzen maken we gebruik van de volgende handige ongelijkheid. Voor elke positief reëel getal a geldt:

$$a + 1/a \geq 2.$$

Je kunt dit als volgt bewijzen. Om te beginnen geldt dat: $(a-1)^2 \geq 0$. Haakjes wegwerken en delen door a geeft dan: $a - 2 + 1/a \geq 0$.
Nu de opgave. We kunnen de volgende reeks ongelijkheden opschrijven:

$$\begin{aligned}
&3(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) \\
&\quad \geq (x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) \\
&\quad \geq 3 + (\frac{x}{y}+\frac{y}{x}) + (\frac{y}{z}+\frac{z}{y}) + (\frac{z}{x}+\frac{x}{z}) \\
&\quad \geq 3+2+2+2 = 9.
\end{aligned}$$

Voor de laatste stap gebruiken we de ongelijkheid die we hierboven noemden. Links en rechts door 3 delen geeft de gevraagde ongelijkheid.

Deze opgave werd opgelost door: Jan Maas, **Aloysius College** te Den Haag, René Pannekoek, H. Verdonk, Jan Tuitman, **Praedinius Gymnasium** te Groningen. De boekenbon gaat naar Jan Maas.

Opgave 59

Hoeveel priemgetallen zijn er die, geschreven in het tientallig stelsel, alleen bestaan uit nullen en enen, die elkaar steeds afwisselen. Ze zien er dus uit als $101010\ldots$.

OPLOSSING. Een getal dat eindigt op een nul is nooit een priemgetal. Neem een getal S dat voldoet aan de voorwaarden. We kunnen S dan schrijven als:

$$S = 1 + 100 + 100^2 + 100^3 + \cdots 100^k,$$

met k oneven. Deze som kunnen we sommeren met behulp van de volgende truc. In de som $100S - S$ vallen bijna alle termen weg, we houden alleen $100^{k+1} - 1$ over. Dus:

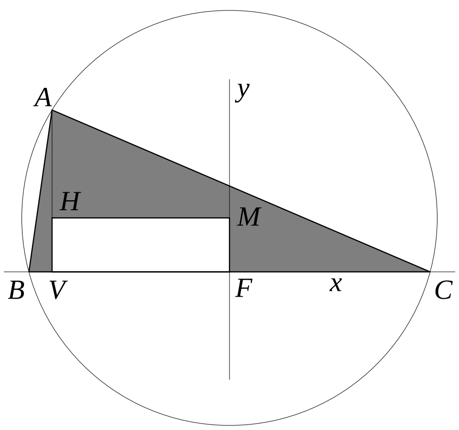
$$\begin{aligned}
S &= \frac{100^{k+1}-1}{99} \\
&= \frac{\left(10^{\frac{k+1}{2}}\right)^2 - 1}{99} \\
&= \frac{(10^{\frac{k+1}{2}}-1)(10^{\frac{k+1}{2}}+1)}{99}.
\end{aligned}$$

Voor $k > 1$ zijn beide factoren in de teller groter dan 99. Dan S is dus geen priemgetal, want ook nadat 99 is weggedeeld blijven er twee factoren over die groter zijn dan 1. In het geval $k = 1$ is $S = 101$, en dat is inderdaad een priemgetal. Het geval $k = 0$ levert $S = 1$ op, en dat is geen priemgetal. De enige oplossing is dus $S = 101$.

Deze opgave is opgelost door: Jan Tuitman, **Praedinius Gymnasium** te Groningen, H. Verdonk te Den Haag en Peter Deleu, Hulste (België).
De boekenbon gaat naar Jan Tuitman.

Opgave 60

Een rechthoek $HMFV$ heeft zijden $HM = 23$ en $MF = 7$. Een driehoek ABC heeft H als hoogtepunt, M als middelpunt van de omgeschreven cirkel, F als midden van BC en V als voetpunt van de hoogtelijn uit A. Wat is de lengte van BC?



OPLOSSING. We maken gebruik van coordinaten. Als x-as kiezen we zijde BC, als y-as, de lijn AV. Het oorsprong komt in F. We hebben nu de punten:

$$\begin{aligned} F &= (0,0), & V &= (-23,0), \\ M &= (0,7), & H &= (-23,7), \\ B &= (-b,0), & A &= (-23,a). \\ C &= (b,0), \end{aligned}$$

We willen de onbekende b bepalen. We gebruiken twee gegevens, allereerst dat $|AM| = |MC|$, oftwel $23^2 + (7-a)^2 = (-b)^2 + 7^2$. Uitwerken levert $a^2 - b^2 - 14a + 23^2 = 0$. Het tweede dat we gebruiken is dat $BH \perp AC$, dat is $(b-23, 7) \perp (23+b, -a)$. Inproduct nemen geeft $(b-23)(b+23) - 7a = 0$, oftewel $b^2 - 23^2 - 7a = 0$. Deze laatste vergelijking gebruiken we om b^2 te elimineren uit de eerste: $a^2 - 21a = 0$. De enige niet ontaarde oplossing is $a = 21$. Invullen in een van de vergelijkingen geeft vervolgens het antwoord $b = 26$, dus $BC = 52$. Merk overigens op dat de waarde van a niet afhangt van de lengte van HM.

Deze opgave is opgelost door: Jan Tuitman, **Praedinius Gymnasium** te Groningen, Luc Gheysens, **Pleinschool** te Kortrijk, H. Verdonk te Den Haag en Peter Deleu, Hulste (België).
De boekenbon gaat naar Luc Gheysens.