Oplossing ’Een koppige munt’

In nummer 4 van Pythagoras (april 2002) staat een verkeerde oplossing van ’Een koppige munt’, uit de rubriek ’Problemen’ van februari 2002. W. Schuurman stuurde ons de volgende (correcte) oplossing.

De fout

De fout in de gegeven oplossing zit in de eerste zin, waarin de kans dat de gekozen munt zuiver is (na twee worpen ’kop’) wordt gedefinieerd en berekend. Dat dat onjuist gebeurt, blijkt bijvoorbeeld uit het toepassen op de kans dat Lisa na de twee worpen ’kop’ met de *valse* munt te maken heeft. Die kans zou dan worden:

$$\frac{\text{P(twee keer 'kop' met valse munt)}}{\text{P(twee keer 'kop' met willekeurige munt)}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot 1} = \frac{8}{5},$$

wat natuurlijk niet kan. Bovendien moet gelden:

$$\text{P(worp met zuivere munt)} + \text{P(worp met valse munt)} = 1.$$

De goede oplossing

De juiste oplossing moet met de *Bayesiaanse statistiek* gebeuren. Elke worp is daarbij een nieuwe evidentie die de kans op Lisa’s bezig zijn met de zuivere munt een verandering laat ondergaan. De oplossing is als volgt.

De kans dat in beginsel de zuivere munt wordt gekozen is $\frac{1}{2}$, idem voor de valse munt.

Eerste worp. De kans op ’kop’ is $\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ en de kans op ’munt’ is dus $1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. De worp blijkt ’kop’ te zijn. Hierna is de kans dat de valse munt is gekozen niet meer $\frac{1}{2}$, maar $\frac{2}{3}$. Immers, in twee van de drie gevallen kwam de geworpen ’kop’ van de valse munt, zie figuur 1. De kans dat met de zuivere munt werd geworpen, is dus gelijk aan $1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

$K \quad K$	$K \quad M$
vals	zuiver

Figuur 1

Tweede worp. De kans dat weer ’kop’ verschijnt, volgt uit het voorafgaande. Deze kans is $\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$. De kans op de tweede keer ’munt’ is derhalve $1-\frac{5}{6} = \frac{1}{6}$. De worp blijkt weer ’kop’ te zijn.

Na deze tweede worp is de kans dat Lisa met de valse munt wierp (die al gestegen was van $\frac{1}{2}$ naar $\frac{2}{3}$) verder gestegen, en wel naar $\frac{4}{5}$. Immers, in vier van de vijf gevallen is de 'kop' afkomstig van de valse munt, zie figuur 2. De kans dat met de zuivere munt werd geworpen, is dus gelijk aan $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

$K \quad K$	$K \quad K$	$K \quad M$
vals	vals	zuiver

Figuur 2

Derde worp. Dit proces kan tot in het oneindige worden voortgezet. Als met dezelfde munt wordt geworpen, is de kans op 'kop' gelijk aan $\frac{4}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$. De kans op 'munt' is dan $1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$. Maar als van munt wordt gewisseld, is de kans op 'kop' gelijk aan $\frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$. De kans op 'munt' is dan $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

Conclusie

De antwoorden op de twee gestelde vragen zijn $\frac{2}{5}$ (40%) en $\frac{1}{10}$ (10%).