Een cirkel is een rechte

Tim Wouters

16 december 2001

We zullen aantonen dat een cirkel een rechte is, maar daarvoor hebben we volgende stelling nodig. (In wat volgt nemen we $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1, 2\}$.)

Stelling 1 *Beschouwen we een regelmatige n-hoek, dan krijgen we voor de limiettoestand van n in ∞ een cirkel.*

Bewijs Op bijgevoegde figuur in bestand Cirkel.jpg staat een deel van een regelmatige n-hoek afgebeeld, met als omgeschreven cirkel $C_{(M,|MK|)}$.

Verder zullen we de hoek $\widehat{KMB}$ benoemen met θ. Aangezien we met een regelmatige n-hoek te maken hebben, geldt voor de hoek θ:

$$\theta = 3D\frac{360°}{2n} = 3D\frac{180°}{n}$$

We zullen nu de limiettoestand in ∞ zoeken van de afstand van het middelpunt M tot een zijde van de regelmatige n-hoek, neem hiervoor in de figuur $|MB|$. De algemene uitdrukking voor $|MB|$ in functie van n wordt gegeven door:

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= 3D \quad \frac{|MB|}{|MK|} \\
&\Updownarrow \\
|MK|\cos\theta &= 3D \quad |MB| \\
&\Updownarrow \\
|MK|\cos\left(\frac{180°}{n}\right) &= 3D \quad |MB|
\end{aligned}$$

We zoeken nu dus de limiettoestand in ∞ van $|MB|$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(|MK|\cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right) = 3D\lim_{n\to\infty}(r\cos(0°)) = 3D\lim_{n\to\infty}(r.1) = 3Dr$$

Bijgevolg is voor n in de limiettoestand in ∞ een regelmatige $n-hoek$ een cirkel, want de afstand tot de zijden is er gelijk aan de straal van de omgeschreven cirkel. □

Stelling 2 *Een cirkel is een rechte.*

Bewijs Om dit te bewijzen gaan we de hoek bepalen die 2 lijnstukken van een regelmatige n-hoek maken. We hernemen de figuur uit vorige stelling en nemen nu de hoek $\widehat{JKL} = 3D\omega$. We bepalen nu de grootte van ω in functie van n:

$$\omega = 3D \; \cancel{2}\frac{180^\circ - \frac{360^\circ}{n}}{\cancel{2}} = 3D180^\circ - \frac{360^{=\circ}}{n}$$

Om de hoek ω te bepalen voor een cirkel moeten we de limiet nemen voor n gaande naar ∞:

$$\omega = 3D \lim_{n\to\infty} \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) = 3D \lim_{n\to\infty} (180^\circ) = 3D180^\circ$$

We zien dus dat "de hoek tussen de aanliggende hoekpunten van een hoekpunt van een regelmatige n-hoek", bij een cirkel 180° is. Aangezien de cirkel geen hoekpunten heeft, geldt dus bij een cirkel: de hoek tussen 2 aanliggende cirkelpunten van een punt van de cirkel is 180°, ofog 3 opeenvolgende punten van een cirkel zijn collineair. Dit geldt nu voor alle punten van een cirkel, dus zijn alle punten van een cirkel collineair. Dit betekent dat een cirkel een rechte is. □