

De wiskunde van Edo Timmermans



Wiskunde en geloof vormen geen voor de hand liggende combinatie. Als wiskundige geloof je iets pas als je het onomstotelijk bewezen hebt. En religie gaat juist over dat wat niet te bewijzen is, en waar je dus hoogstens in geloven kunt. In de moderne opvatting hebben religie en wetenschap principieel geen overlap.

Ooit lag dat anders. Mensen zoals Kepler en Newton zagen hun wetenschappelijk werk in het verlengde van een diepe religieuze overtuiging. Zij achterhaalden de wetten die de beweging van hemellichamen beschrijven en meenden daarmee Gods gedachten te lezen. Gaan wij nog verder terug in de tijd, dan zien we godsdienst en wiskunde nog in ninger verbonden. Pythagoras en zijn volgelingen bestudeerden getallen in de overtuiging dat ze daarmee alle raadsels van het leven ontrafelen zouden. Hun wiskunde en hun geloof waren één.

Ook heden ten dage zijn er mensen voor wie wiskunde en spiritualiteit overlappen. Zo bijvoorbeeld voor Edo Timmermans, die je misschien nog kent van zijn artikelen over dissecties in onze vorige jaargang. Tijdens zijn studie informatica aan de Technische Universiteit stuitte Edo in het faculteitsbladje op een puzzel over de dissectie van een vier-

kant. Verdeel een vierkant van 13×13 in vier stukken waarmee je een vierkant van 5×5 en van 12×12 kunt leggen. De puzzel loste hij rap op, maar dissecties lieten hem niet meer los. Al gauw zette hij de computer in om systematisch naar dissecties van vierkanten en kubussen te zoeken. Dat onderzoek leverde hem menig mooie verrassing op.

Belangstelling voor spiritualiteit kreeg Edo mee van zijn moeder. Zij was het die hem in 1991 op het idee bracht naar India te reizen om daar de goeroe Sai Baba te bezoeken. 'Mijn band met Sai Baba heeft mij vele merkwaardige en onverklaarbare ervaringen opgeleverd. Het heeft belangrijke gevolgen gehad voor mijn visie op wetenschap. Veel mensen geloven iets pas wanneer ze het met hun eigen ogen zien. Ik houd het liever bij het voordeel van de twijfel: iets is voor mij pas onmogelijk als dat wiskundig kan worden bewezen.'

In het artikel op de volgende twee pagina's beschrijft Edo een bijzondere kubusdissectie waarin een puzzelstuk voorkomt dat opvallend veel lijkt op een bekend symbool uit het hindoeïsme. 'Geen toeval,' zegt Edo. En van die overtuiging laat hij zich niet afbrengen totdat iemand wiskundig bewijzen kan dat die overeenkomst wel toevallig is.

Teken v

Tijdens een wiskundeles in de bovenbouw vertelde mijn leraar dat mystici al eeuwen op zoek zijn naar een teken van God in de wiskunde.

Ondanks naarstig zoeken hebben zij het nog steeds niet gevonden, dus zal zo'n teken van God er wel niet zijn, aldus het betoog van mijn leraar. Bij mij kwam toen de gedachte op: 'Oh, maar dat zal ik later vinden,' het leek of iemand anders die gedachte in mijn hoofd plaatste. 'Ik heb geen idee hoe zo'n teken eruit ziet en waar ik het zou moeten zoeken,' redeneerde ik, 'ach ja, ik zie het wel,' en daar liet ik het verder maar bij.

Nu, ongeveer vijftien jaar later, meen ik het teken van God gevonden te hebben in een heel bijzondere kubusdissectie.

Waarschijnlijk heb je wel eens het om-symbool gezien, zie figuur 1 (links), een symbool dat door Hindoes wordt gezien als een teken van God. Om, ofwel aum, is de oerklank waaruit het hele universum is ontstaan, volgens de heilige boeken van de Hindoes. Het om-symbool heeft vele betekenissen, waaronder die van de heilige drie-eenheid. De puzzels die ik onderzoek, vormen ook een drie-eenheid. Bij een kubusdissectie

gaat het er immers om een grote kubus in stukjes te verdelen waarmee je samen drie kleine kubusjes kunt maken.

Heilige drie-eenheid-puzzel

Er zijn vele kubusdissecties, het gebied dat ik met de computer doorzocht heb bevat er zo'n 1,7 miljoen. (Lees mijn artikel in het februari-nummer van de vorige jaargang.) Vele daarvan bevatten een eenvoudig schuifprobleem, waarbij een stukje verschoven moet worden voor een ander eruit gehaald kan worden. Ook zijn er puzzels waarbij stukjes gedraaid moeten worden en puzzels waarbij er één uniek sluitstuk is, dat je eerst moet weghalen om de kubus uiteen te halen. Maar onder de 1,7 miljoen was maar precies één dissectiepuzzel die zowel een interessant schuifprobleem, een rotatie als een uniek sluitstuk bevatte. Dus weer een drie-eenheid.

Toen ik bezig was die ene puzzel van hout te maken, zag ik tot mijn verbazing dat een van de puzzelstukken een opmerkelijke gelijkenis vertoont met het om-symbool. In mijn ogen een teken van God, en ik gaf de puzzel de naam *Heilige drie-eenheid-puzzel*.

In figuur 2 zie je de puzzel. In de $5 \times 5 \times 5$ -kubus vormt het groene stuk het sluitstuk. Na het groene stuk



Figuur 1

Een metalen om-symbool, afkomstig uit India (links), en het om-symbool uit de dissectie (rechts).

an God

kan het gele stuk worden verwijderd. Om hierna het rode stuk te kunnen verwijderen, dient eerst het witte stuk verschoven te worden. Ten slotte kunnen het grijze en het witte stuk uit elkaar draaien.

Zeldzame vorm

Om een idee te krijgen hoe zeldzaam de vorm van het om-symbool-stuk is, heb ik de *slankheidswaarde* van een puzzelstuk gedefinieerd. Deze waarde geeft aan op hoeveel plaatsen in het stuk er vier eenheidskubusjes zijn die een $1 \times 2 \times 2$ -balkje vormen. Hoe vaker dit voorkomt, hoe massiever het stuk is. De slankheidswaarde van een $2 \times 2 \times 3$ -balk is 11 (ga dit na) en voor het om-symbool-stuk is deze waarde 3. Hoe groter een stuk, hoe groter die waarde doorgaans is. Een groot stuk met een lage slankheidswaarde is een slank stuk. Het blijkt dat het om-symbool-stuk uitzonderlijk slank is. In de ongeveer 82000 puzzels die volledig uit elkaar kunnen in het volledig doorgerkende gebied, bevinden zich slechts twee puzzels waarin een stuk met slankheidswaarde 3 zit dat groter is dan het om-symbool-stuk.

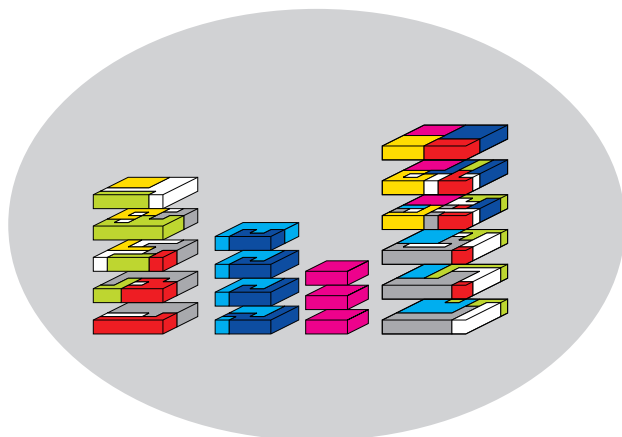
Grote, slanke puzzelstukken zijn dus redelijk zeldzaam. Daaruit volgt dat de kans dat een willekeurig puzzelstuk binnen die 82000

puzzels op het om-symbool lijkt klein is, omdat die gelijkenis een groot slank stuk vereist. Dat die gelijkenis juist in die ene puzzel met die drie problemen voorkomt, is volgens mij dan ook erg bijzonder.

Alomtegenwoordigheid

Een van de betekenissen van het om-symbool is alomtegenwoordigheid. Het om-symbool-stuk is in de $6 \times 6 \times 6$ -kubus alomtegenwoordig omdat het alle andere stukken raakt. Ook in de $5 \times 5 \times 5$ -kubus is het stuk alomtegenwoordig, het is het enige stuk dat aan alle zijden zichtbaar is. Het komt overigens redelijk vaak voor dat een stuk in een puzzel op die manier alomtegenwoordig is. Wel apart zijn de zes getallen die je vindt wanneer je het zichtbare oppervlak meet dat per zijde zichtbaar is. Bij het om-symbool-stuk vind je de getallen 2, 3, 4, 5, 6 en 12. De middelste vier getallen komen precies overeen met de grondtallen uit de gelijkheid $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, die ten grondslag ligt aan de kubusdissecties. De getallen 3, 4, 5 en 6 komen bij minder dan één procent van de alomtegenwoordige puzzelstukken voor. Ook

2 en 12 vind ik er goed bij passen, omdat $3 + 4 + 5 = 6 \times 2 = 12$. Dat lijkt veel op de vorige vergelijking zonder machten.



Figuur 2

De Heilige drie-eenheid-puzzel: met de drie kleine kubussen (ribben 3, 4 en 5) kun je één grote maken (ribbe 6). De lagen van de kubussen zijn los van elkaar getekend, zodat de vorm van elk stuk zichtbaar is.