

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Anne de Haan, Arno Kret, Thijs Notenboom en Iris Smit

Op vrijdag 25 januari is de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Als het dan tegen zit, is deelname aan de tweede ronde nog niet uitgesloten! Want leerlingen die het goed doen bij de Pythagoras Olympiade krijgen eveneens een uitnodiging om mee te doen met de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Bovendien wordt bij de Pythagoras Olympiade onder de goede leerling-inzenders per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Reden genoeg dus om mee te doen! Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro.



18

LET OP: NIEUW ADRES!

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu

of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je naam, ook je adres, school en klas.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 29 februari 2008.

OPGAVE 150

Het vlak wordt verdeeld in evenwijdige banen, allemaal met breedte 1. Elk van die banen wordt of wit of zwart gekleurd. Bewijs dat je bij elke mogelijke kleuring, en elke gelijkzijdige driehoek met gehele zijdes, een manier kunt vinden om de driehoek op het vlak te leggen zodat de drie hoekpunten op banen van dezelfde kleur liggen.

OPGAVE 151

Is het mogelijk om 10^{10} te schrijven als het product van twee gehele getallen met de eigenschap dat in geen van die twee getallen (in de decimale notatie) het cijfer 0 voorkomt? Zo ja, geef dan twee getallen. Zo nee, bewijs dat het niet mogelijk is.

OPLOSSING

146

Geef alle oplossingen van het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} abc + d = 2 \\ abd + c = 2 \\ acd + b = 2 \\ bcd + a = 2 \end{cases}$$

Hierbij zijn a, b, c en d reële getallen.

OPLOSSING Uit de gegeven vergelijkingen volgt: $abcd = d(2 - d)$, $abcd = c(2 - c)$, $abcd = b(2 - b)$ en $abcd = a(2 - a)$.

Dus $abcd$ is een punt uit het beeld van de functie $f(x) = x(x - 2)$. Deze functie is symmetrisch in de lijn $x = 1$ en dus weten we dat $f(x) = f(2 - x)$. Omdat $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = abcd$, moet gelden dat $b = a$ of $b = 2 - a$. Evenzo voor c en d . We kunnen dus drie soorten gevallen onderscheiden:

- (1) $a = b = c = d$, (2) $a = b = c = 2 - a$ en
 (3) $a = b = 2 - c = 2 - d$.

In geval (1) geldt dat $a^4 = a(2 - a)$, dus $a = b = c = d = 1$, wat inderdaad een oplossing is van het gegeven stelsel, of $a = b = c = d = 0$, wat geen oplossing is van het gegeven stelsel.

Geval (2) geeft $a^3(2 - a) = a(2 - a)$; dit heeft als oplossingen $a = b = c = 0$, $d = 2$, $a = b = c = d = 1$, $a = b = c = -1$, $d = 3$ en $a = b = c = 2$, $d = 0$; invullen in het gegeven stelsel geeft dat alleen de tweede en derde oplossing voldoen.

Geval (3) geeft $a^2(2 - a)^2 = a(2 - a)$; hiervan zijn de oplossingen $a = b = 0$, $c = d = 2$, $a = b = 2$, $c = d = 0$ en $a = b = c = d = 1$; na controleren blijkt alleen de derde oplossing te voldoen.

Conclusie: $(a, b, c, d) \in \{(1, 1, 1, 1), (-1, -1, -1, 3), (-1, -1, 3, -1), (-1, 3, -1, -1), (3, -1, -1, -1)\}$.

Deze opgave werd goed opgelost door **Bernard Asselbergs** uit Leersum, **Elias C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **Henkdrick Jan van Eijdsden** uit Capelle aan den IJssel, **Fabian Hulpia** van Edugo Campus de Toren te Oostakker (België), **Ernst van de Kerkhof** uit Sittard, **Ela Kowalczyk** uit Amsterdam en **Sandra van Wijk** uit Best.

De boekenbon gaat naar Fabian Hulpia.

OPLOSSING

147

Op een lijn l liggen vier verschillende punten A, B, C en D , in deze volgorde. Construeer een vierkant $PQRS$ dat aan één zijde van l ligt zodat de lijn PQ de lijn l snijdt in A , de lijn RS de lijn l snijdt in B , de lijn QR de lijn l snijdt in C en de lijn door PS de lijn l snijdt in D .

OPLOSSING Trek vanuit B een lijnstuk van lengte $|CD|$ loodrecht op l en noem het eindpunt E . Trek, dezelfde kant op, vanuit C een lijnstuk van lengte $|AB|$ loodrecht op l en noem het eindpunt F . Noem het snijpunt van de lijnen AE en DF punt P . Trek evenwijdig met AE een lijn door B en noem het snijpunt met DP punt S . Trek evenwijdig met DF een lijn door C , en noem het snijpunt met AP punt Q . Nu ontstaat een vierhoek, waarvan we het nog onbenoemde snijpunt van BS en CQ de naam R geven.

Omdat $|EB| = |CD|$ en $|CF| = |AB|$ en $\angle ABE = \angle FCD$, zijn $\triangle ABE$ en $\triangle FCD$ congruent. Hieruit blijkt dat $\angle PAD + \angle PDA = \angle EAB + \angle FDC = \angle EAB + \angle AEB = 180^\circ - \angle ABE = 90^\circ$. Dit betekent dat $\angle QPS = \angle APD = 90^\circ$. Uit de evenwijdigheid van QP met RS en van PS met QR blijkt nu dat alle hoeken van vierhoek $PQRS$ 90° zijn, zodat het een rechthoek is. Tevens is $|PQ|$ gelijk aan de lengte van de hoogtelijn vanuit C in $\triangle FCD$, en is $|PS|$ gelijk aan de lengte van de hoogtelijn vanuit B in $\triangle ABE$. Vanwege de congruentie van deze twee driehoeken moeten die twee hoogtes gelijk zijn, zodat $PQRS$ een vierkant is.

Deze opgave werd goed opgelost door **Bernard Asselbers** uit Leersum, **Hendrik Jan van Eijdsden** uit Capelle aan den IJssel, **Fabian Hulpia** van Edugo Campus de Toren te Oostakker (België) en **Ernst van de Kerkhof** te Sittard.

De boekenbon gaat naar Fabian Hulpia.