

‘Vier kleuren volstaan’, zegt de computer

door Jan Guichelaar en Marco Swaen

Teken een landkaart, kleur de landen zó dat buurlanden nooit dezelfde kleur hebben, en gebruik daarbij zo min mogelijk kleuren. Je zult zien dat je aan vier kleuren genoeg hebt. Maar hoe bewijs je dat? Dat is kortgezegd het *vierkleurenprobleem*, waar inmiddels 150 jaar aan gewerkt is en dat vele bewijzen opgeleverd heeft waar echter altijd iets op aan te merken viel. Het eerste bewijs waar nog geen fout in ontdekt is, stamt uit 1976. Het is zo omvangrijk en ingewikkeld dat het alleen met een computer geleverd en gecontroleerd kan worden.

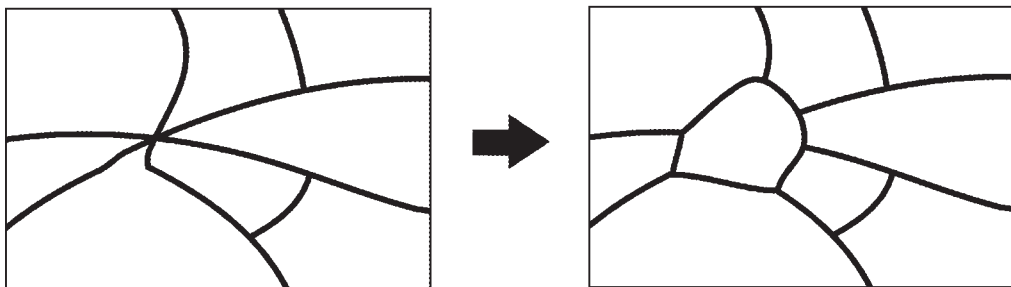
4 Het vierkleurenprobleem

In 1852 was Francis Guthrie (1831-1899) bezig de landkaart van de Engelse counties te kleuren, toen het hem opviel dat hij aan vier kleuren genoeg had, om elke county een andere kleur te geven dan de aangrenzende counties. Zijn broer Frederick legde het probleem voor aan de Londense wiskunde-professor Augustus De Morgan (1806-1871), via wie het probleem enige bekendheid kreeg. Zo’n vijftig jaar later was het Arthur Cayley (1821-1895) van Trinity College in Cambridge die er voor het eerst een publicatie aan wijdde. Hij kon het pro-

bleem niet oplossen, maar toonde wel aan dat het voldoende was landkaarten te beschouwen waarin precies drie landen in elk punt samenkomen (zie volgende paragraaf).

Een jaar later, in 1879, publiceerde de Londense advocaat Alfred Kempe (1849-1922) als eerste een bewijs voor de vierkleurenstelling. In 1880 volgde een tweede bewijs van de hand van P.G. Tait (1831-1901). Het bewijs van Kempe hield elf jaar stand, toen vond Percy Heawood (1861-1955) uit Durham er een fout in. Niet lang daarna sneuvelde ook het bewijs van Tait.

Voor we de geschiedenis van het vier-



Figuur 1 Oplossen van een zeslandenpunt

kleurenprobleem vervolgen, bekijken we Kempes bewijs, dat behalve een fout ook een aantal vruchtbare ideeën bevatte waar latere onderzoekers op verder gingen. Eerst zullen we echter even stil staan bij wat we bedoelen met 'een landkaart', en de zogenaamde telformule afleiden waar Kempes bewijs op gebaseerd is.

Wat is een kaart?

Bij het kleuren van de landkaart doet de precieze vorm van de grenzen er feitelijk niet toe, het gaat er alleen om welk land aan welk land grenst. Ga daarom uit van de punten waar meerdere landen bij elkaar komen en vereenvoudig de grenslijnen verder tot verbindingslijntjes. Op die manier krijgen we een *vlakke graaf*, met hoekpunten en ribben. De gebieden die aldus door de ribben van elkaar gescheiden worden, zijn de landen van de kaart. Let op dat ook het buitengebied meegerekend moet worden als land, de kaart stelt immers eigenlijk het oppervlak van een bol voor.

Op de wereldkaart komen landen voor die uit meerdere gebiedsdelen bestaan. Wil je alle gebiedsdelen van zo'n land dezelfde kleur geven, dan kun je niet meer toe met vier kleuren. Bij onze kaarten zijn de landen dus steeds één aaneengesloten gebied van de graaf.

We mogen ervan uit gaan dat op onze kaarten een land nooit helemaal in een ander land ligt (bijvoorbeeld San Marino in Italië). Zulke landen hebben toch maar één buurland, dus kunnen achteraf gemakkelijk ingevoegd worden en gekleurd. Het is ook voldoende, zoals Cayley inzag, alleen te kij-

ken naar landkaarten met uitsluitend *drielandenpunten*. Stel dat je een kaart wilt kleuren met daarin bijvoorbeeld een vierlandepunt. Leg dan eerst over dat punt een klein extra landje waardoor er alleen nog drielandenpunten over zijn. Kleur die kaart met vier kleuren. Laat vervolgens het extra landje weer inkrimpen tot een hoekpunt, en de oorspronkelijke kaart is ook netjes gekleurd met vier kleuren. In figuur 1 zie je hoe het werkt bij een zeslandepunt.

De telformule

Neem een vlakke graaf, tel het aantal gebieden (inclusief het buitengebied), het aantal hoekpunten en het aantal ribben (respectievelijk z , h en r), dan zie je dat geldt:

$$h + z = r + 2.$$

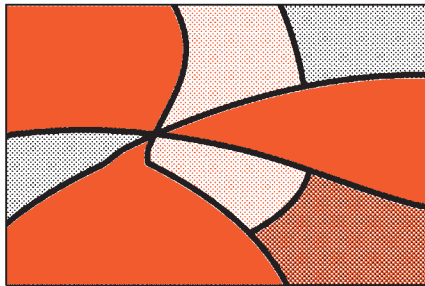
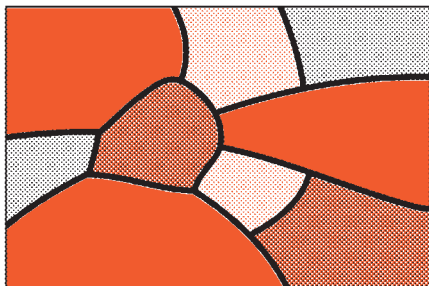
Deze betrekking staat bekend als de *veelvlakkenformule van Euler*, een bewijs ervan vind je bijvoorbeeld in het decembernummer van onze vorige jaargang.

Zeg dat de kaart bestaat uit c_2 tweehoeken (land omsloten door twee ribben), c_3 driehoeken, enzovoorts, tot en met c_k k -hoeken. Dan geldt voor het aantal gebieden:

$$z = c_2 + c_3 + \dots + c_k.$$

Het aantal ribben kun je tellen vanuit de gebieden, elke n -hoek levert n ribben, die allemaal wel weer gedeeld worden met een buurland. Vandaar:

$$2r = 2c_2 + 3c_3 + \dots + kc_k.$$



Omdat we ervan uit mogen gaan dat de kaart alleen drielandenpunten kent, geldt ook:

$$2r = 3h.$$

Combineer deze drie verbanden met de formule van Euler, dan krijg je de zogenaamde *telformule*:

$$4c_2 + 3c_3 + 2c_4 + c_5 - c_7 - 2c_8 - \dots - (k-6)c_k = 12.$$

Onvermijdelijke set

Uit de telformule volgt dat ten minste één van de getallen c_2 , c_3 , c_4 of c_5 groter is dan 0. Dit betekent dat elke kaart ten minste één tweehoek, één driehoek, één vierhoek of één vijfhoek moet bevatten. Het setje {tweehoek, driehoek, vierhoek, vijfhoek} wordt daarom een *onvermijdelijke set*



Figuur 2 De onvermijdelijke set (tweehoek, driehoek, vierhoek, vijfhoek)

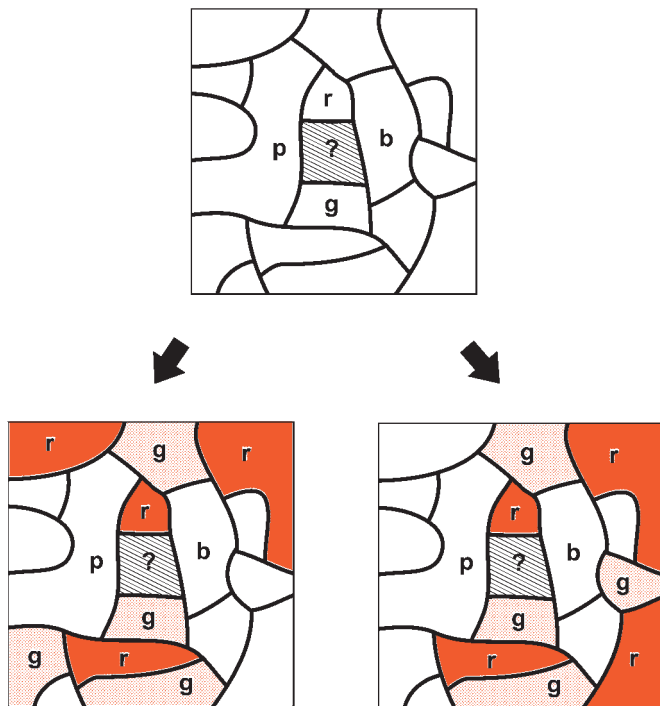
genoemd, zie figuur 2.

Het begrip onvermijdelijke set (straks komen we een andere onvermijdelijke set tegen) speelt in de oplossing van het vierkleurenprobleem een belangrijke rol. In de simpelste onvermijdelijke set gaat het om landen met een bepaald aantal burens. In ingewikkeldere sets kan het ook gaan om groepjes landen, bijvoorbeeld 'een vijfhoek met een aangrenzende zeshoek'. Het algemene woord voor zo'n element in de kaart – een land of een bepaalde combinatie van landen – is 'configuratie'.

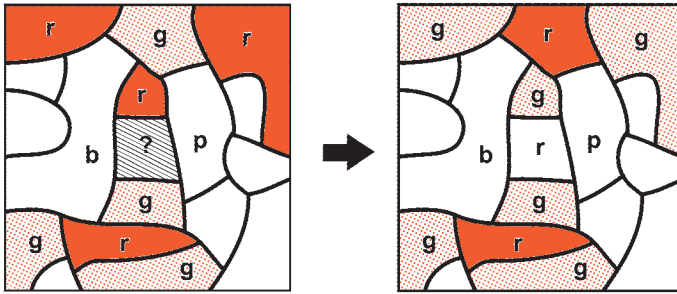
De methode van het reduceren

Uiteraard kun je het vierkleurenprobleem niet oplossen door elke mogelijke kaart in te kleuren, er zijn immers oneindig veel kaarten. Op een handige manier kan het probleem echter zo aangepakt worden dat je maar eindig veel gevallen hoeft te bekijken.

Ga uit van het ongerijmde: stel dat er kaarten bestaan waarvoor vier kleuren *niet* voldoende zijn, oftewel stel dat er tegenvoorbeelden zijn. Dan moet er ook een



Figuur 3 Het 'bewijs' van Kempe: twee mogelijkheden los/vast



Figuur 4 Reductie van vierhoek 'los'

tegenvoorbeeld (of meerdere) zijn met een minimum aantal landen, oftewel een *kleinste tegenvoorbeeld*.

Het bijzondere van een kleinste tegenvoorbeeld is dat als je er een land uit weghaalt, de overgebleven kaart wel vierkleurbaar moet zijn, anders zou je een nog kleiner tegenvoorbeeld te pakken hebben.

De aanpak is dan als volgt. Neem zo'n (denkbeeldig) kleinste tegenvoorbeeld. Laat er een bepaald land uit weg, dan is de overgebleven kaart wel vierkleurbaar. Knutsel dan wat met die overgebleven kaart zodat je het ene extra land ook een van de vier kleuren kunt geven. Dan blijkt de kaart dus toch vierkleurbaar te zijn, en hebben we een tegenspraak.

De vraag is welk land je uit het denkbeeldige kleinste tegenvoorbeeld moet weglaten, je mag namelijk niets speciaals over die kaart aannemen. Dat is precies waar we de onvermijdelijke set voor nodig hebben. Hoe het kleinste tegenvoorbeeld er ook uit ziet, ergens moet hij namelijk een van de configuraties uit de onvermijdelijke set bevatten. Loop dus de configuraties van de set één voor één langs en laat steeds zien hoe in dat geval de vierkleuring van de kaart zonder die configuratie uitgebreid kan worden tot een vierkleuring van de kaart met die configuratie er weer in. Lukt dit, dan zeggen we dat die specifieke configuratie *gereduceerd* kan worden. Als alle configuraties uit de onvermijdelijke set gereduceerd kunnen worden, kan er dus geen tegenvoorbeeld bestaan, en zijn dus alle kaarten vierkleurbaar.

Het 'bewijs' van Kempe

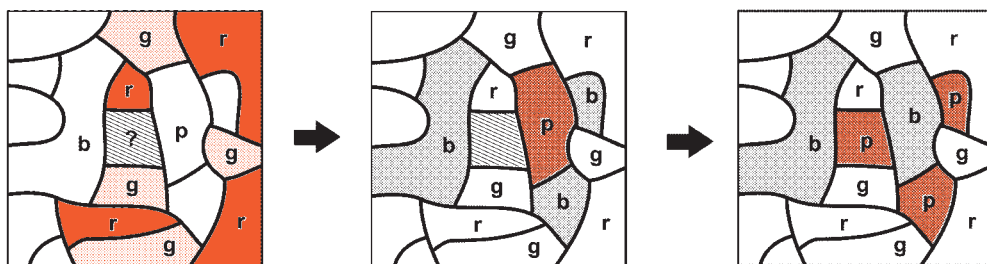
Kempe was de eerste die zijn bewijs opzette vanuit het reduceren van de configuraties van een onvermijdelijke set. De termen 'reduceren' en 'onvermijdelijke set' zijn overigens niet van hem, maar zijn pas later in zwang geraakt.

Neem een kleinste tegenvoorbeeld (vijf kleuren nodig) en beschouw de twee-, drie-, vier- of vijfhoek die er onvermijdelijk ergens in moet zitten.

Bevat de kaart een tweehoek of een driehoek, dan is het simpel: laten verdwijnen, de overblijvende kaart kleuren met vier kleuren (dat kan met een land minder), laten verschijnen en er is altijd een vierde kleur om de twee- of driehoek te kleuren. De configuraties tweehoek en driehoek zijn dus reduceerbaar.

Voor de vierhoek lukt dit niet meer, want de vierhoek kan omgeven zijn door vier landen met ieder een eigen kleur, zeg met rood (r), blauw (b), groen (g) en paars (p), zie figuur 3 (boven). Neem nu alle rode en groene landen die aan het rode land boven en aan het groene land onder aan de vierhoek vastzitten. Er zijn nu twee mogelijkheden. Of deze twee takken zijn niet met elkaar verbonden, zie figuur 3 (links), of zij zijn wel met elkaar verbonden, zie figuur 3 (rechts).

Zo niet, dan kan elk groene land boven, rood gekleurd worden en elk rode groen. De vierhoek heeft dan drie kleuren om zich heen (groen, blauw, groen, paars) en kan dus rood gekleurd worden, zie figuur 4. Zo ja, dan is er dus een 'weg', een *Kempe-*



Figuur 5 Reductie van vierhoek 'vast'

keten, linksom of rechtsom, waarlangs het rode land boven verbonden is (via rood, groen, rood, groen, enzovoorts) met het groene land onder. Een verwisseling van kleuren heeft dan geen zin, omdat het laatste land door de vier kleuren begrensd blijft. Maar dan is het wel zo, dat er geen verbonden weg (blauw, paars, blauw, paars, enzovoorts) van het blauwe land rechts met het paarse land links kan zijn. We kunnen dus rechts een kleurverwisseling toepassen op blauw-paars. Het laatste land is dan omgeven door drie kleuren (rood, groen en paars) en kan dus blauw gekleurd worden, zie figuur 5.

Tenslotte nam Kempe de vijfhoek en bracht met twee kleurveranderingen en twee ketens tegelijkertijd het aantal aangrenzende kleuren terug tot drie, waarmee hij het vierkleurenprobleem dacht opgelost te hebben.

In 1890 toonde Percy Heawood aan dat in het geval met vijf aangrenzende landen er niet altijd twee kleurwisselingen tegelijkertijd uitgevoerd kunnen worden. Toch is de Kempe-ketenmethode van grote waarde gebleven bij al het latere onderzoek. Heawood trouwens gebruikte Kempes methode om aan te tonen dat elke kaart in elk geval wel gekleurd kan worden met vijf kleuren. (Zijn bewijs kun je vinden in het artikel 'Veelvlakken kleuren' in *Pythagoras* van februari 2003.)

Ontladen

In de eerste helft van de twintigste eeuw gingen de onderzoeken verder op het spoor van een onvermijdelijke set van redu-

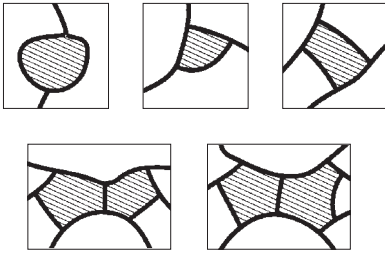
ceerbare configuraties. De Duitser Heinrich Heesch (1906-1995) speelde in dit onderzoek een centrale rol. Van hem stamt de techniek van het 'ontladen' waarmee nieuwe onvermijdelijke sets opgespoord kunnen worden, zoals de onvermijdelijke set {tweehoek, driehoek, vierhoek, twee vijfhoeken aan elkaar, een vijf- en zeshoek aan elkaar}, zie figuur 6.

We laten zien hoe je met *ontladen* kunt bewijzen dat elke kaart inderdaad ten minste één van deze configuraties moet bevatten.

Ken aan elk land de 'lading' $6 - k$ (k is het aantal grenzen) toe. Vijfhoeken hebben dus lading 1, zeshoeken lading 0, zevenhoeken -1 , achthoeken -2 , enzovoorts.

Stel nu (tegen beter weten in) dat geen van de configuraties uit figuur 6 in de kaart voorkomt. Bereken de totale lading van de hele kaart. Omdat er geen twee-, drie- of vierhoeken in voorkomen, geldt: $c_2 = c_3 = c_4 = 0$. De totale lading van de kaart is dan: $1 \times c_5 + (-1) \times c_7 + (-2) \times c_8 + (-3) \times c_9 - \dots$ Volgens de telformule levert dit: $c_5 - c_7 - 2c_8 - 3c_9 - \dots = 12$; de totale lading is dus 12.

Verdeel nu (ontladen) de lading 1 van elke vijfhoek netjes (5 keer $1/5$) over zijn 5 burens. Merk op dat rond elke vijfhoek alleen zevenhoeken of hoger zitten (onze aanname) met ladingen $-1, -2$ enzovoorts. De lading van elke vijfhoek wordt dus 0, die van elke zeshoek blijft 0. Een zevenhoek kan ten hoogste 3 vijfhoekige burens hebben, en wordt dus ten hoogste $-1 + 3 \times 1/5 = -2/5$. Zo blijft ook de lading van landen met meer dan 7 burens negatief. De totale lading van de landkaart is dan dus negatief. Maar de totale lading is 12 en positief. We



Figuur 6 Onvermijdelijke set (tweehoek, driehoek, vierhoek, twee vijfhoeken aan elkaar, een vijf- en zeshoek aan elkaar)

stuiten op een tegenspraak, en concluderen dat er geen kaart kan bestaan waarin niet ten minste één van de vijf configuraties voorkomt.

De hulp van de computer

Steeds als Heesch een nieuwe onvermijdelijke set gevonden had, probeerde hij alle configuraties ervan te reduceren. Lukte dat bij een bepaalde configuratie niet, dan paste hij de ontladingsmethode zo aan dat er een grotere onvermijdelijke set ontstond waaruit de boosdoener verdwenen was en vervangen door een aantal verfijndere configuraties.

Begin jaren zeventig had Heesch een onvermijdelijke set van inmiddels 8904 configuraties, die naar zijn stellige overtuiging alle reduceerbaar moesten zijn. Bij het reduceren maakte hij gebruik van een computer, het zoeken van herkleuringen bleek namelijk aardig te automatiseren. Heesch kreeg echter niet het benodigde geld bijeen om alle computerberekeningen daadwerkelijk uit te voeren, en tot op de dag van vandaag is niet bekend of alle 8904 configuraties van zijn onvermijdelijke set reduceerbaar zijn.

Eindelijk succes

In de daaropvolgende jaren was er een wedstrijd gaande tussen diverse groepen wiskundigen die in het spoor van Heesch probeerden het vierkleurenprobleem te kraken. Het was het team van Wolfgang Haken en Kenneth Appel dat als eerste een bewijs rond had. Hun onvermijdelijke set bestond uit 1936 configuraties. In het bewijs dat

deze 1936 configuraties inderdaad onvermijdelijk waren, hanteerden zij een ontladingsalgoritme waarin 487 verschillende gevallen werden onderscheiden. Om de onvermijdelijke set te vinden, hadden zij de computer intensief gebruikt. Toen zij de set eenmaal hadden echter, waren zij in staat met de hand te bewijzen dat de set inderdaad onvermijdelijk was. Het tweede gedeelte van het bewijs, de reductie van de 1936 configuraties, was zo omvangrijk dat het niet met de hand uitvoerbaar of zelfs maar controleerbaar was. Al met al bestond hun bewijs materieel uit zo'n 50 bladzijden samenvatting, 100 bladzijden details, 700 bladzijden achtergrondwerk en 10.000 diagrammen. De computer had 1200 uur gerekend met een uitdraai van meer dan een meter hoog.

Is dit een bewijs?

Het vierkleurenprobleem leek opgelost, maar wie precies wilde weten hoe, moest vertrouwen op een computer. Het bewijs van Haken en Appel lokte dan ook een discussie uit over wat nu eigenlijk een wiskundig bewijs is.

Sommigen keurden dit computerbewijs principieel af, omdat het volgens hen strijdig was met de uitgangspunten van de wiskunde. Zij voeren aan dat wiskundige kennis wezenlijk verschilt van kennis bij andere wetenschappen. Een natuurkundige bijvoorbeeld doet een aantal experimenten en trekt daar dan algemene conclusies uit. Een volgend experiment zou tot andere conclusies kunnen leiden. Een wiskundige daarentegen trekt alleen conclusies als hij absolute zekerheid heeft, en doet dat op basis van onomstotelijk bewijs.

Het bewijs dat Haken en Appel presenteerden, was door niemand helemaal te begrijpen of zelfs maar te lezen, ook door henzelf niet. Het enige dat wij kunnen doen, is zelf ook een programma schrijven, dat draaien en kijken of onze computer dan ook zegt dat al die 1936 configuraties reduceerbaar zijn. Zo'n bewijsmethode heeft meer weg van een natuurkundig experiment.

Ter verdediging van het computerbewijs voerden anderen aan dat veel klassieke bewijzen ook voor de meeste mensen niet te volgen zijn, en dat zulke bewijzen vaak jaren lang voor waar gehouden worden, tot iemand er toevallig een fout in ontdekt. De kans dat de computer een foutje over het hoofd ziet bij het controleren van het bewijs is trouwens veel kleiner dan dat een mens dat zou doen.

Recente ontwikkelingen

Inmiddels zijn er twee foutjes in het bewijs van Appel en Haken gevonden, maar die bleken corrigeerbaar. Sinds 1994 is er een tweede bewijs, afkomstig van Neil Robertson, Paul Seymour, Daniel Sanders en Robin Thomas, die eigenlijk het bewijs van Haken en Appel slechts wilden verifiëren, maar daarbij vastliepen. Toen besloten ze dan maar een eigen bewijs te proberen. Hun onvermijdelijke set bevat 633 configu-

raties en hun ontladingsalgoritme telt maar 32 regels. Bovendien is al hun programma-tuur beschikbaar op Internet, zodat ieder-een in principe de berekeningen zelf kan herhalen.

De hoop blijft natuurlijk gevestigd op een echt wiskundig bewijs, dat voor men-sen te volgen is en met de hand te contro-leren. Regelmatig worden zulke bewijzen gepresenteerd, maar houden meestal niet lang stand. Sinds 2000 is er een zuiver alge-bräisch bewijs van Ashay Dhawadker, zie bronnen. Deskundigen op het gebied van het vierkleurenprobleem hebben zich over dit bewijs nog niet uitgesproken. Misschien wachten zij af tot de computer het voor hun controleren kan.

Bronnen

Four Colours Suffice, Robin Wilson, Penguin Books, ISBN 0-141-00908-X

An update on the Four-Color Theorem, Robin Thomas, Notices of the AMS, vol. 45, no. 7

<http://www.geocities.com/dharwadker>

Oplossingen Kleine nootjes nr. 5

Sokken

In het slechtste geval heb je na 18 trekkingen alle zwarte en alle blauwe sokken te pakken. Bij 20 trekkingen ben je verzekerd van twee grijze sokken.

Tandwiel

Omdat 127 een priemgetal is, zal voor elk kleiner tandwiel gelden dat het 127 omwentelingen gemaakt heeft als de pijlen voor het eerst weer tegenover elkaar komen te staan.

Hardloopwedstrijd

Ja, de volgorde zou in die maand kunnen zijn: Aad-Ben-Cor (10 dagen), Ben-Cor-Aad (10 dagen) en Cor-Aad-Ben (10 dagen).

Perzik in fles

Doe de fles in een vroeg stadium over de vrucht. Zo groeit de perzik in de fles.

Dozen vullen

Aad en Ben vullen samen drie dozen in een uur, Ben en Cor twee dozen en Aad en Cor anderhalve doos per uur. Hieruit volgt dat Aad $\frac{5}{4}$ doos per uur vult. Dat is één doos in $\frac{4}{5}$ uur, ofwel 48 minuten.